S E S 2 0 2 6
Twenty-second International Scientific Conference
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
20 – 24 October 2026, Stara Zagora, Bulgaria

АНАЛИЗ НА ТРИ МЕТОДА ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПЕРИОДА НА ПУЛСИРАЩАТА ПРОМЕНЛИВА ЗВЕЗДА XZ CYGNI

Анатоли Радев

Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
e-mail: anatoli.radev2002@mail.space.bas.bg

Ключови думи: *променливи звезди, анализ на периоди, RR Лира, фотометрия, Лафлер–Кинман, Диминг, Ломб–Скаргл*

Резюме: *Представен е анализ на три метода за определяне на периода на пулсиращата променлива звезда XZ Cygni (тип RR Лира, подтип RRab). Използвани са данни от Международната база данни на Американската асоциация на наблюдателите на променливи звезди (AAVSO), обхващащи 63 денонощия в периода JD 2459797.35494 – 2459860.56322, във фотометрична ивица V, съдържащи 9734 наблюдения, извършени от един наблюдател. Приложени са три утвърдени статистически метода – на Лафлер–Кинман, на Диминг и на Ломб–Скаргл. Посредством Фурие-анализ от шести ред са получени амплитудните съотношения и фазовите параметри. Резултатите показват, че изборът на метод има решаващо значение за прецизното физическо моделиране.*

COMPARATIVE ANALYSIS OF THREE METHODS FOR PERIOD DETERMINATION OF PULSATING VARIABLE STAR XZ CYGNI

Anatoli Radev

Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
e-mail: anatoli.radev2002@space.bas.bg

Keywords: variable stars, period analysis, RR Lyrae, photometry, Lafler–Kinman, Deeming, Lomb–Scargle

Abstract: *An analysis of three methods for determining the period of the pulsating variable star XZ Cygni (RR Lyrae type, RRab subtype) is presented. Data from the International Database of the American Association of Variable Star Observers (AAVSO) were used, covering 63 days in the interval JD 2459797.35494 – 2459860.56322, in the V photometric band, containing 9,734 observations made by a single observer. Three established statistical methods were applied: Lafler–Kinman, Deeming, and Lomb–Scargle. By means of sixth-order Fourier analysis, amplitude ratios and phase parameters were obtained. The results show that the choice of method is of decisive importance for precise physical modeling.*

Въведение

В настоящата работа са изследвани фотометричните данни на пулсиращата променлива звезда XZ Cygni (тип RR Лира, подтип RRab), получени от Международната база данни на Американската асоциация на наблюдателите на променливи звезди (AAVSO). Данните обхващат 63 денонощия във V фотометрична ивица и съдържат 9734 индивидуални измервания, извършени от един наблюдател, с цел минимизиране на систематичните грешки от различна апаратура и калибровка.

Приложени са три утвърдени метода за периоден анализ. Методът на Лафлер–Кинман [1] е непараметричен и търси периода, при който фазовата крива е най-гладка, без да предполага синусоидална форма на сигнала. При този метод търсеният период съответства на минимума на статистиката. Методът на Диминг [2] е Фурие базиран и изчислява мощността на сигнала за всяка пробна честота, като при него търсеният период съответства на максимума на периодограмата. Методът на Ломб–Скаргл [3, 4] усъвършенства анализа на Фурие чрез

въвеждането на фазово отместване и отчитане на дисперсията на данните, което позволява и статистическа оценка на значимостта на резултатите.

Целта на изследването е да се сравнят трите метода по отношение на точност, стабилност и чувствителност към формата на светлинната крива, както и да се демонстрира необходимостта от прецизно определяне на периода, за да бъдат извлечени точните хармонични параметри на звездата. Резултатите са представени в раздел 4, а тяхното обсъждане – в раздел 5.

Наблюдателни данни

В настоящата работа са използвани фотометрични данни от Международната база данни на Американската асоциация на наблюдателите на променливи звезди (AAVSO) за пулсиращата променлива звезда XZ Cygni [5].

Масивът от данни обхваща 63 календарни дни (от 5 август до 8 октомври 2022 г.) с обща продължителност T = 63.2 денонощия (JD 2459797.35494 – 2459860.56322). Той съдържа 9734 измервания във фотометрична ивица V, извършени от един наблюдател (ATE). Това осигурява висока хомогенност на данните и минимизира систематичните грешки, произтичащи от разлики в апаратурата и калибровката.

Всички измервания са в звездни величини (mag) и са получени при съпоставими условия на наблюдение, което позволява сравнението на резултатите от трите метода.

Методи и програми за периоден анализ

За анализа на неравномерно разпределените във времето фотометрични данни бяха приложени три утвърдени статистически метода: на Лафлер–Кинман, на Диминг и на Ломб–Скаргл. Те са разработени специално за работа с астрономически времеви редове, характеризиращи се с пропуски и неравномерна дискретизация.

Първите два метода са извършени с програмната система WinEFK, разработена от В. П. Горански [6] – специализиран софтуерен пакет за изследване на променливи звезди. При тях бе зададена начална епоха t_0 = 2459810.469 JD , а пробният период бе търсен в интервала от P_{min} = 0.4650 дни до P_{max} = 0.4670 дни. За постигане на максимална точност фазовата стъпка беше последователно сгъстявана от 0.5 до $5x10^{-8}$.

Методът на Ломб–Скаргл не е наличен в WinEFK; за него беше използван собствен софтуер на Python, базиран на библиотеката astropy.timeseries.LombScargle [7]. За разлика от локалното търсене в тесен интервал, тук честотният диапазон е изследван в по-широки граници (P_{min} = 0.2 дни до P_{max} = 0.8 дни). Честотната стъпка е определена съгласно критерия $\Delta f = 1/(10T)$ в случая Δf = 0.001582 $дни^{-1}$, където T дни е общата дължина на времевия интервал. Този избор осигурява достатъчно фина мрежа от пробни честоти, за да не бъдат пропуснати съществени пикове.

Първият метод, който приложих, е методът на Лафлер–Кинман. Той се основава на минимизиране на т.нар. „дължина на струната“ – сумата от квадратите на разликите между съседни точки във фазовата крива. За всеки пробен период *P (или честота f = 1/P)* се изчислява стойността (1):

$$(1) \qquad I_{LK}(f) = \frac{\sum_{k=1}^{N-1}(m_{k+1} - m_k)^2}{\sum_{k=1}^{N}(m_k - \overline{m})^2}$$

където m_k са звездните величини, сортирани по фаза, $\overline{m}$ е тяхната средна стойност. Минимумът на I_{LK} съответства на най-гладката фазова крива, т.е. на истинския период. Предимството на метода е, че не предполага синусоидална форма на сигнала и е устойчив на шум.

Вторият използван метод е методът на Диминг. Той представлява Фурие базиран подход, който адаптира дискретното преобразуване на Фурие за работа с неравномерно разпределени данни във времето. За всеки пробен период *P (или честота f = 1/P)* се изчислява периодограмата (2):

$$(2) \qquad I_D(f) = \frac{1}{N}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} m_k \cos 2\pi f t_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N} m_k \sin 2\pi f t_k\right)^2\right]$$

където m_k са звездните величини в моментите t_k. Максимумът на периодограмата съответства на доминиращия период в сигнала.

Третият приложен метод е методът на Ломб–Скаргл. Той усъвършенства Фурие базирания подход чрез въвеждане на фазово отместване τ, гарантиращо инвариантност на резултата спрямо избора на начален момент от време. В основата му стои нормираната периодограма, която отчита центрирането на данните и тяхната дисперсия. За всеки пробен период P (или честота $f = 1/P$) се изчислява статистиката (3):

(3) $$P_{LS}(f) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{\left(\sum_{k=1}^{N}(m_k - \overline{m})\cos 2\pi f(t_k - \tau)\right)^2}{\sum_{k=1}^{N}\cos^2 2\pi f(t_k - \tau)} + \frac{\left(\sum_{k=1}^{N}(m_k - \overline{m})\sin 2\pi f(t_k - \tau)\right)^2}{\sum_{k=1}^{N}\sin^2 2\pi f(t_k - \tau)}\right]$$

където σ е дисперсията на данните, $\overline{m}$ е тяхната средна стойност, а τ е фазовото отместване, гарантиращо инвариантност спрямо избора на началния момент t_0.

За количествено характеризиране на формата на светлинна крива апроксимирах данните с ред на Фурие от шести порядък (4):

(4) $$m(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{6}[A_k \cos(2\pi k\varphi) + B_k \sin(2\pi k\varphi)]$$

където φ е фазата, изчислена по определения период, а A_0 е средната звездна величина. От коефициентите A_k и B_k се получават амплитуди R_k (5) и фази φ_k (6):

(5) $$R_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

(6) $$\varphi_k = \frac{\pi}{2} - arctan\frac{B_k}{A_k} \ (mod\ 2\pi)$$

Тези комбинации от параметри се използват широко при анализа на RR Лира звездите. Амплитудните отношения и фазовите разлики са въведени за пръв път от Simon & Teays [8] като надеждна мярка за структура на светлинните криви.

В настоящата работа фазовите разлики Φ_{21} и Φ_{31}, приведени към максимум на блясъка, бяха изчислени по формули (7):

(7) $$\Phi_{21} = \varphi_2 - 2\varphi_1\ (mod\ 2\pi), \qquad \Phi_{31} = \varphi_3 - 3\varphi_1\ (mod\ 2\pi)$$

Впоследствие Jurcsik & Kovács [9] демонстрират, че именно тези параметри могат успешно да се използват за определяне на физическите характеристики на звездите от този тип.

Резултати

В този раздел са представени резултатите. Получените периоди и честоти са обобщени в таблица 1.

Таблица 1. Сравнение на основните периоди, получени по методите на Лафлер–Кинман, Диминг и Ломб–Скаргл, и по каталог (AAVSO)

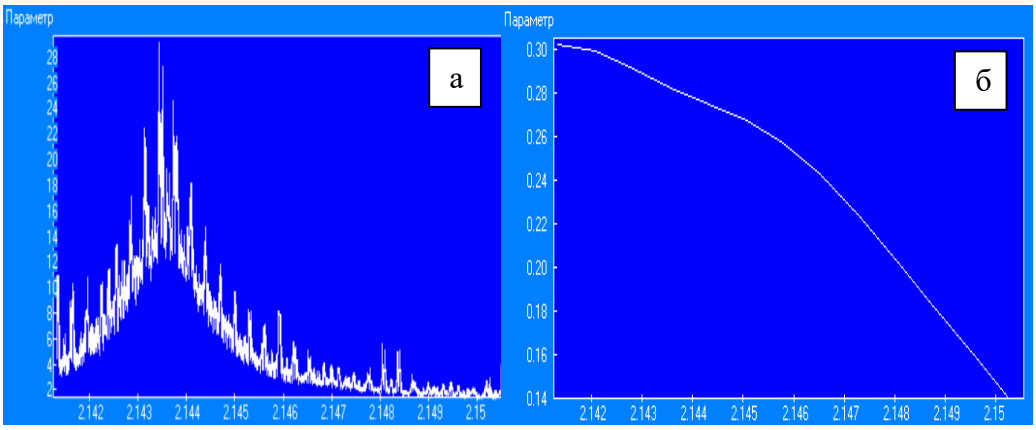
Метод	**Период (дни)**	**Честота (дни$^{-1}$)**	**Отклонение (дни)**
Лафлер–Кинман	0.4665421	2.143429	**–0.000056**
Диминг	0.4669882	2.141382	**+0.000390**
Ломб–Скаргл	0.4665370	2.143500	**–0.000061**
Каталог (AAVSO)	0.4665980	2.142900	–

За да бъде оценена стабилността на методите, достъпни в програмата WinEFK, беше проследено изменението на определения период при последователно сгъстяване на фазовата стъпка. Резултатите са показани в таблица 2.

Таблица 2. Зависимост на определения период и съответната статистика от фазовата стъпка за методите на Лафлер–Кинман (I_{LK}) и Диминг (I_D) реализирани посредством WinEFK.

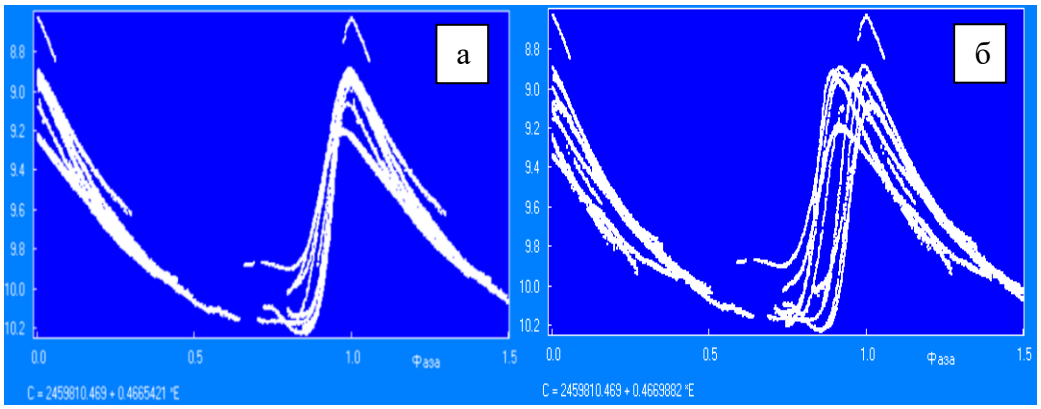
Фазова стъпка	Лафлер–Кинман P (дни)	Статистика I_{LK}	Диминг P (дни)	Статистика I_D
0.5	0.4670000	0.224	0.4653777	0.182
0.05	0.4664830	0.077	0.4650546	0.139
0.005	0.4665347	0.045	0.4667702	0.293
0.0005	0.4665416	0.037	0.4669707	0.302
0.00005	0.4665419	0.034	0.4669897	0.302
0.000005	0.4665420	0.034	0.4669881	0.302
0.0000005	0.4665421	0.034	0.4669882	0.302
0.00000005	0.4665421	0.034	0.4669882	0.302

На фиг. 1 са показани периодограмите, получени по методите на Лафлер–Кинман (ляво) и Диминг (дясно). Периодограмата на Лафлер–Кинман представя суровите стойности на статистиката I_{LK}, поради което се наблюдават локални флуктуации, характерни за този непараметричен метод. При метода на Диминг периодограмата е представена чрез изгладена крива, която подчертава доминиращия пик, без да показва фините вариации. И при двата метода се наблюдава изразен екстремум.



Фиг. 1. Периодограми на XZ Cygni, получени с програмата WinEFK за времевия интервал JD 2459797.35494 – 2459860.56322 по методите на: (а) Лафлер–Кинман – показана е нормираната мощност, чийто максимум съответства на минимума на статистиката (ляво); (б) Диминг – показана е статистиката, чийто максимум съответства на търсения период (дясно)

Фазовите криви представени на фигура 2 показват характерната за RRab звездите асиметрична форма – бързо нарастване на блясъка и по-бавно затихване.



Фиг. 2. Фазови криви на XZ Cygni, получени с периодите, определени по методите на: (а) Лафлер–Кинман (P = 0.4665421 дни) и (б) Диминг (P = 0.4669882 дни). Кривите показват типичната за RRab звездите силно асиметрична форма с рязко нарастване и по-бавно затихване на блясъка

След фазиране с определения период, данните бяха апроксимирани с ред на Фурие от шести порядък, изчислен по съответния метод. Получените амплитудни отношения и фазови стойности са обобщени в таблица 3.

Таблица 3. Хармонични параметри на XZ Cygni, получени по трите метода за времевия интервал JD 2459797.35494 – 2459860.56322

Параметър	Лафлер-Кинман	Диминг	Ломб-Скаргл
P (дни)	0.466542	0.466988	0.466537
A_1 (mag)	0.4309	0.4055	0.4310
A_2 (mag)	0.1729	0.1427	0.1729
A_3 (mag)	0.1345	0.0873	0.1346
R_{21}	0.4012	0.3519	0.4012
R_{31}	0.3122	0.2152	0.3122
Φ_{21}	117.63°	125.80°	117.56°
Φ_{31}	256.43°	258.66°	256.46°

И трите метода потвърждават, че XZ Cygni е типична RRab звезда – с $R_{21} > 0.35$ и силно несинусоидална светлинна крива.

Обсъждане

Сравнението на трите метода показва, че и трите надеждно намират основния период на XZ Cygni, близък до каталожната стойност от AAVSO (0.466598 дни). Най-добро съвпадение показва методът на Лафлер–Кинман (отклонение 5.6×10^{-5} дни), следван плътно от метода на Ломб–Скаргл (6.1×10^{-5} дни). Методът на Диминг дава най-голямо отклонение (3.9×10^{-4} дни), което вероятно се дължи на чувствителността на Фурие базирания подход към хармоничния състав на силно асиметричната крива на RRab звездите.

По отношение на стабилността при сгъстяване на фазовата стъпка методът на Лафлер–Кинман се оказва значително по-устойчив – промяната в определения период при преход от стъпка 5×10^{-4} към 5×10^{-7} е само 0.04 s, докато при метода на Диминг е 1.5 s (35 пъти по-голяма). Това потвърждава предимството на непараметричните методи при анализ на асиметрични светлинни криви.

Физическата интерпретация на резултатите потвърждава, че XZ Cygni е типична RRab звезда – с асиметрична светлинна крива, бързо нарастване и бавно затихване, и амплитудни отношения R_{21} и R_{31}, които са в типичния диапазон за този подтип.

Сравнението на фазовите стойности Φ_{21} и Φ_{31} между трите метода показва, че стойностите за Лафлер–Кинман (Φ_{21} = 117.63°, Φ_{31} = 256.43°) и Ломб–Скаргл (Φ_{21} = 117.56°, Φ_{31} = 256.46°) са практически идентични, докато при Диминг се наблюдава забележимо отклонение (Φ_{21} = 125.80°, Φ_{31} = 258.66°). Това отклонение е съществено и би попречило на прецизното изчисляване на физическите параметри на звездата. Получените резултати потвърждават, че Фурие базираният метод на Диминг е по-чувствителен към хармоничния състав на асиметричната крива и не е препоръчителен избор при работа със звезди от този тип.

Заключение

В заключение можем да отбележим, че сравнителният анализ на трите метода за определяне на периода на XZ Cygni има следните съществени резултати:

- И трите метода дават период, близък до каталожния ($P_{кат}$ = 0.466598 дни), което потвърждава надеждността на използваните данни.
- Най-точно съвпадение с каталога показва методът на Лафлер–Кинман.
- Методът на Лафлер–Кинман е и най-стабилен при сгъстяване на фазовата стъпка.
- Методът на Диминг е най-чувствителен към хармоничния състав на кривата и дава най-голямо отклонение.
- Получените амплитудните отношения R_{21} и R_{31}, както и фазите Φ_{21} и Φ_{31}, потвърждават, че XZ Cygni е типична RRab звезда.
- Получените стойности за Лафлер–Кинман и Ломб–Скаргл са практически идентични, което потвърждава надеждността на резултатите.

Литература:

1. Lafler, J., Kinman, T.D., An RR Lyrae Star Survey with the Lick 20-inch Astrograph. II., ApJS, 1965, 11, 216.
2. Deeming, T.J., Fourier analysis with unequally-spaced data, Ap&SS, 1975, 36, 137.
3. Lomb, N.R., Least-squares frequency analysis of unequally spaced data, Ap&SS, 1976, 39, 447.
4. Scargle, J.D., Studies in astronomical time series analysis. II., ApJ, 1982, 263, 835.
5. AAVSO International Database – XZ Cygni, https://vsx.aavso.org/index.php?view=detail.top&revid=152583
6. Горански, В. П., Програмна система WinEFK, ГАИШ МГУ, 2008.
7. Astropy Collaboration, Price-Whelan, A.M., et al., The Astropy Project: Sustaining and Growing a Community-oriented Open-source Project, ApJ, 2022, 935, 167.
8. Simon, N.R., Teays, T.J., The Fourier decomposition of RR Lyrae light curves, ApJ, 1982, 261, 588.
9. Jurcsik, J., Kovacs, G., Determination of [Fe/H] from the light curves of RR Lyrae stars, A&A, 1996, 312, 111.